1) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) το μέγιστο στοιχείο, το ελάχιστο σημείο, το supremum και το infimum καθενός από τα παρακάτω σύνολα.

Λύση:

- $A=\{-1/n : n\in\mathbb{N}\}$ $\quad \sup A=0,\ \min A=\inf A=-1$

- $B=\{x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} : (x^2+2)^2\leq 4\}=\emptyset$ $\quad \inf B=+\infty,\ \sup B=-\infty$

- $\Gamma=\{\underbrace{(1+\frac{1}{n})^n}_{=a_n} : n\in\mathbb{N}\}$

Επειδή η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα $\inf\Gamma=\min\Gamma=a_1=2$

$\sup\Gamma=\lim a_n=e$ Το Γ δεν έχει μέγιστο στοιχείο (διότι (a_n) γν. αύξουσα).

- $\Delta=\{(-1)^n+\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}=\{1+\frac{1}{2n} : n\in\mathbb{N}\}\cup\{-1+\frac{1}{2n-1} : n\in\mathbb{N}\}=$
$=\{3/2, 5/4, 7/6, \dots\}\cup\{0, -2/3, -4/5, -6/7, \dots\}$

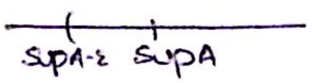
$\max\Delta=3/2$ άρα και $\sup\Delta=3/2$

Η (a_n) με $a_n=1+\frac{1}{2n}$ είναι γν. φθίνουσα με $a_n\to -1$

$\inf\Delta=-1$ και το Δ δεν έχει ελάχιστο.

2) Αν A είναι μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n\to\sup A$. Με την επιπλέον υπόθεση ότι $\sup A\notin A$ να δείξετε ότι η ακολουθία μπορεί να επιλεγεί γνησίως αύξουσα.

Λύση:

α) 

Ξέρουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ $\exists x\in A$ με $\sup A-\varepsilon<x\ (\leq\sup A)$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω για $\varepsilon=1/n$, $n\in\mathbb{N}$ βρίσκουμε $x_n\in A$ με $\sup A-\frac{1}{n}<x_n\leq\sup A$. Από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών $x_n\to\sup A$

β) Όταν $\sup A\notin A$ θέλω $\exists x\in A$ με $\sup A-\varepsilon<x<\sup A$

Επαγωγικά επιλέγουμε την y_n ώστε $y_n<y_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ … $\forall n\in\mathbb{N}$

1ο επαγωγικό βήμα: Επιλέγουμε $y_1 \in A$ με $\sup A - 1 < y < \sup A$

Γενικό επαγωγικό βήμα: Υποθέτω ότι το y_n έχει οριστεί

Έχουμε, $y_n < \sup A$

Επίσης, $\sup A - \frac{1}{n+1} < \sup A$

Άρα, $\max\left\{y_n, \sup A - \frac{1}{n+1}\right\} < \sup A$

Έτσι μπορούμε να επιλέξουμε $y_{n+1} \in A$ ώστε $y_n > y_{n+1}$

$\sup A - \frac{1}{n+1} > y_{n+1}$

Η (y_n) είναι γνησίως αύξουσα και $y_n \to \sup A$.

3) Να διατυπώσετε και αποδείξετε αποτέλεσμα αντίστοιχο της προηγούμενης άσκησης για το infimum.

Λύση:

Η λύση της άσκησης είναι όμοια με αυτή της άσκησης 2.

4) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία και $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

α) $a_n \to x$ (δηλ. για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $|a_n-x|<\varepsilon$ για κάθε $n\geq n_0$).

β) Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $|a_n-x|\leq\varepsilon$ για κάθε $n\geq n_0$.

γ) Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $|a_n-x|<120\varepsilon$ για κάθε $n\geq n_0$.

Λύση:

α) ⇒ β) άμεσο

β) ⇒ α) Έστω $\varepsilon>0$. Θέτω $\varepsilon_1=\varepsilon/2>0$

Από το β) $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $|a_n-x|\leq\varepsilon/2<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$

Άρα $|a_n-x|<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$. Άρα $a_n\to x$.

α) ⇒ γ) άμεσο

γ) ⇒ α) Έστω $\varepsilon>0$.

Εφαρμόζοντας το γ) για $\varepsilon_1=\varepsilon/120$ βρίσκουμε n_0 ώστε ...

5) Να βρεθούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών.

Λύση:

- $a_n=\frac{3+(-1)^n}{n}$ $\qquad 0\leq a_n\leq 4/n$, με $0\to 0$ και $4/n\to 0$. Άρα, $a_n\to 0$.

- $b_n=\frac{9n!+2^n}{2n!+6^n}=\frac{9+\frac{2^n}{n!}}{2+\frac{6^n}{n!}}\to 9/2$, όπου $\frac{2^n}{n!}\to 0$ και $\frac{6^n}{n!}\to 0$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad \frac{x^n}{n!}\to 0$ (Αποδεικνύετα...

⊙ $\delta_n = \frac{2n^2+1}{5n^3+n} + \frac{2n^2+2}{5n^3+(n-1)} + \dots + \frac{2n^2+(n-1)}{5n^3+2} + \frac{2n^2+n}{5n^3+1}$

$$n\cdot\frac{2n^2+1}{5n^3+n} \le \delta_n \le n\cdot\frac{2n^2+n}{5n^3+1}$$

$$\underbrace{\frac{2+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{1}{n^2}}}_{\downarrow\, 2/5} = \frac{2n^3+n}{5n^3+n} \le \delta_n \le \frac{2n^3+n^2}{5n^3+1} = \underbrace{\frac{2+\frac{1}{n}}{5+\frac{1}{n^3}}}_{\downarrow\, 2/5}$$

Από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Ακολουθιών προκύπτει $\delta_n \to 2/5$.

⊙ $\varepsilon_n = \frac{8^n+5^n}{6\,8^n+7^n} = \frac{1+\overbrace{\left(\frac{5}{8}\right)^n}^{\to 0}}{6+\underbrace{\left(\frac{7}{8}\right)^n}_{\to 0}} \to 1/6$

⊙ $\zeta_n = \frac{1^1+2^2+\dots+n^n}{n^n}$

$$1 \le \zeta_n \le \frac{(n-2)(n-2)^{n-2}+(n-1)^{n-1}+n^n}{n^n} = \frac{(n-2)^{n-1}}{n^{n-1}}\cdot\frac{1}{n} + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}}\cdot\frac{1}{n} + 1 \le \frac{1}{n}+\frac{1}{n}+1 \to 1$$

Από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Ακολουθιών προκύπτει $\zeta_n \to 1$.

6) Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν οι υπακολουθίες της $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

Λύση:

($\Rightarrow$) Έστω ότι $a_n \to x$.

Τότε, εφόσον $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθίες της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ προκύπτει $a_{2n}\to x$ και $a_{2n-1}\to x$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε πως $a_{2n}\to x$ και $a_{2n-1}\to x$

Έστω $\varepsilon>0$.

Εφόσον $a_{2n}\to x$ $\exists n_1\in\mathbb{N}$ ώστε $|a_{2n}-x|<\varepsilon$ $\forall n\ge n_1$ (I)

Εφόσον $a_{2n-1}\to x$ $\exists n_2\in\mathbb{N}$ ώστε $|a_{2n-1}-x|<\varepsilon$ $\forall n\ge n_2$ (II)

Θέτουμε $n_0=\max\{2n_1, 2n_2-1\}$.

Έστω τυχαίο $n\in\mathbb{N}$ $n\ge n_0$

α) Αν n άρτιος $n=2k$ $k\in\mathbb{N}$ $2k\ge n_0\ge 2n_1 \Rightarrow k\ge n_1$. Άρα, από την (I) $|a_{2k}-x|<\varepsilon \Rightarrow$ $|a_n-x|<\varepsilon$

β) Αν n περιττός $n=2k-1$ $k\in\mathbb{N}$ $2k-1\geq n_0\geq 2n_2-1 \Rightarrow k\geq n_2$. Άρα, από την (ΙΙ)

$$|a_{2k-1}-x|<\epsilon \Rightarrow |a_n-x|<\epsilon$$

Επομένως, $a_n \to x$.

γ) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία ώστε οι υπακολουθίες της $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι συγκλίνουσες. Να δειχθεί ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Λύση:

$a_{2n}\to x$ Η $(a_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της (a_{2n}) [για $k=3n$]

$a_{2n-1}\to y$

Άρα, $a_{6n}\to x$

$a_{3n}\to z$ Η $(a_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της (a_{3n}) [για $k=2n$]

Άρα, $a_{6n}\to z$.

Από μοναδικότητα ορίου ακολουθίας προκύπτει $x=z$.

Η $(a_{6n-3})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ [για $k=3n-1$]

Άρα, $a_{6n-3}\longrightarrow y$.

Η $(a_{6n-3})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ [για $k=2n-1$]

Άρα, $a_{6n-3}\to z$.

Από μοναδικότητα ορίου ακολουθίας προκύπτει $y=z$.

Άρα, $x=y$. Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε $a_n\to x$.

8) Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_1=1$ και $a_{n+1}=\frac{4+3a_n}{3+2a_n}$. Να δείξετε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και να βρεθεί το όριό της.

Λύση:

$a_1=1$ $\quad a_{n+1}=\frac{4+3a_n}{3+2a_n}=\frac{3/2\,(2a_n+3)-1/2}{3+2a_n}=3/2-\frac{1}{4a_n+6}$

Με επαγωγή εύκολα (a_n) αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνει.

Θέτοντας $x=\lim a_n$ ... προκύπτει $x=\sqrt{2}$.

9) Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_1=1$ και $a_{n+1}=1+\frac{1}{1+a_n}$. α) Δείξτε ότι $1\leq a_n\leq 2$, $\forall n\in\mathbb{N}$. β) Δείξτε ότι η $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, η $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, ενώ η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι μονότονη (ούτε τελικά μονότονη). γ) Δείξτε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και βρείτε το όριό της.

Λύση:

$a_1=1$ $\quad a_{n+1}=1+\frac{1}{1+a_n}=\frac{a_n+2}{a_n+1}$

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+2}{a_{n+1}+1} = 1 + \frac{1}{1+a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+a_n}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{a_n}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{3+2a_n}{1+a_n}} = 1 + \frac{1+a_n}{3+2a_n} = \frac{4+3a_n}{3+2a_n}$$

Θέτοντας $b_n = a_{2n-1}$ έχουμε $b_1 = 1 = a_1$

$$b_{n+1} = a_{2n+1} = a_{(2n-1)+2} = \frac{4+3a_{2n-1}}{3+2a_{2n-1}} = \frac{4+3b_n}{3+2b_n}$$

Από την προηγούμενη άσκηση (b_n) γνησίως αύξουσα.

$b_n \to \sqrt{2}$.

Θέτοντας $\gamma_n = a_{2n}$ έχουμε $\gamma_1 = a_2 = 3/2$

$$\gamma_{n+1} = a_{2n+2} = \frac{4+3a_{2n}}{3+2a_{2n}} = \frac{4+3\gamma_n}{3+2\gamma_n} = 3/2 - \frac{1}{4\gamma_n+6}.$$

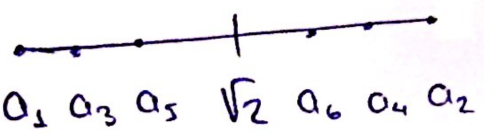
Αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας επαγωγή

$\gamma_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \gamma_{n+1} < \gamma_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

(γ_n) φθίνουσα $\quad$ Προκύπτει $\gamma_n \to \sqrt{2}$

Εφόσον $a_{2n} \to \sqrt{2}$ και $a_{2n-1} \to \sqrt{2}$

Προκύπτει $a_n \to \sqrt{2}$



$a_{2n-1} < a_{2n}$

$a_{2n} > a_{2n-1}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.